กรณีศึกษา : การแก้โจทย์ปัญหาค่าสูงสุดต่ำสุดของฟังก์ชันโดยใช้
The Geometer's Sketchpad (GSP)

รองศาสตราจารย์ อุบล กลองกระโทก

สาขาวิชาคณิตศาสตร์สารสนเทศ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา กรุงเทพมหานคร ประเทศไทย

ubolsompis@yahoo.com

Case Study in Solving Optimization Problems Using The Geometer's Sketchpad (GSP)

Assoc Prof. Ubol Klongkratoke

Department Informatics Mathematics. Faculty Science & Technology.

University Rajabhat Suan Sunundha, Bangkok ,Thailand.

ubolsompis@yahoo.com

บทคัดย่อ

การศึกษาครั้งนี้เป็นการวิจัยเชิงปฏิบัติการ มีจุดประสงค์ของการศึกษาเพื่อศึกษา พฤติกรรมของ นักศึกษาครู สาขาคณิตศาสตร์ ที่มีความรู้ความสามารถในการใช้โปรแกรมสำเร็จรูป The Geometer's Sketchpad (GSP) ในระดับดี ต่อการแก้โจทย์ปัญหาค่าสูงสุดต่ำสุดของฟังก์ชันโดยใช้ GSP และพัฒนา โมเดลการแก้โจทย์ปัญหาที่เหมาะสม จาก การศึกษาในครั้งนี้ได้พบข้อเท็จจริงของพฤติกรรมของนักศึกษา และโมเดลของการแก้โจทย์ปัญหา ค่าสูงสุดต่ำสุดของ ฟังก์ชันโดยใช้ GSP ซึ่งจะนำโมเดลดังกล่าว ไปใช้ ในการศึกษาวิจัย กับนักศึกษาชั้นปีที่ 1 สาขาวิทยาศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา ต่อไป

Abstract

The purpose of this study, which is a action research, is to study a behavior of the teaching students in the field of Mathematics, who are able to use the Geometer's Sketchpad (GSP) well in solving the maximum and minimum value problems by using GSP and developing models of solving problems properly. The fact found from this study will be used in the study of the first year university students in Science, the Faculty of Science and Technology, Suan Sunandha Rajaphat University, in the future.

คำสำคัญ 1. โจทย์ปัญหาค่าสูงสุดต่ำสุดของฟังก์ชัน
2. The Geometer's Sketchpad (GSP)

1. ความเป็นมา

การปฏิรูปการเรียนการสอนด้านคณิตศาสตร์ยังมีความสำคัญเป็นอย่างยิ่ง สำหรับประเทศที่กำลังพัฒนา ไทยก็เป็นประเทศหนึ่งที่จะต้องให้ความสำคัญกับเรื่องนี้เป็นอย่างมาก ถึงแม้ว่าจะมีเปลี่ยนแปลงหลักสูตร ให้เหมาะสมอย่างไรก็ตามยังไม่สมารถที่จะพัฒนาผู้เรียนคณิตศาสตร์ให้เป็นผู้ที่มีความคิดอย่าง เป็นเหตุเป็นผล วิเคราะห์หรือสังเคราะห์ได้ ตามจุดมุ่งหมายของหลักสูตรสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ใน ช่วงชั้นต่าง ๆ และยิ่งเป็นการคิดแก้โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวัน ก็ดูว่าเป็นเรื่องที่สามารถทำได้ ไม่ง่ายนัก เมื่อมีโอกาส ได้พบกัน ระหว่างนักการศึกษา ครู อาจารย์ไม่ว่าจะเป็นระดับการศึกษาขั้น พื้นฐาน หรือขั้นอุดมศึกษาก็มักจะพูดเป็นเสียงเดียวกันว่ามาตรฐานการเรียนรู้ของนักเรียน นักศึกษาดูเหมือนกับ มีแนวโน้มที่จะต่ำลงเรื่อย ๆ จนน่าเป็นห่วง ถึงแม้ว่า ในระดับเวทีสากลนั้นนักเรียนของไทยเราสามารถ คว้าเหรียญทองหรือเหรียญรางวัลต่าง ๆ จากการแข่งขันโอลิมปิควิชาการของแต่ละปีก็ตาม นั่นเป็นเพียง ส่วนน้อยเมื่อเทียบกับนักเรียน นักศึกษาทั้งประเทศ บางคนก็วิเคราะห์ หาสาเหตุเพื่อเป็นแนวทางในการ แก้ไข ปัญหาดังกล่าว เช่นบางคนอ้างว่าน่าจะเป็นเพราะครู อาจารย์ที่สอนคณิตศาสตร์ไม่สอนให้เด็กได้คิด ด้วยตนเอง ชอบสอนแบบสรุปหรือติว เพื่อให้เด็กได้คะแนนจากการสอบคัดเลือกมาก ๆโดยไม่เน้นเรื่องของ ทักษะ/ กระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียนมาตั้งแต่ระดับประถมศึกษา พอมาเรียนในระดับที่สูงขึ้น ก็มักจะใช้วิธีการแบบเดิม ๆ ที่เคยเรียน จึงทำให้ไม่มีทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์เท่าที่ควร ทำให้ไม่สามารถแก้โจทย์ปัญหาต่าง ๆ ได้ ด้วยสาเหตุดังกล่าวนี้และจากประสบการณ์การเรียน การสอนคณิตศาสตร์มากกว่า 30 ปี ไม่ว่าจะเป็นการเรียนการสอนในระดับช่วงชั้นต่าง ๆ ทั้งหลักสูตรของไทย หลักสูตรนานาชาติ ที่สอนในประเทศไทย อีกทั้งหลักสูตรของต่างประเทศ และจากการอบรม การศึกษา ด้วยตนเองทำให้ข้าพเจ้าศึกษาหาแนวทางในการพัฒนาทักษะ/ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ เพื่อนำมา ใช้ ในการแก้โจทย์ปัญหา ค่าสูงสุดต่ำสุดของ ฟังก์ชันโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์The Geometer's Sketchpad ซึ่งเป็น โปรแกรมที่ ได้รับความนิยมอย่างแพร่หลายกับนักเรียน นักศึกษาของไทย เราทุกระดับชั้น อีกทั้งยังเป็นโปรแกรมที่สามารถจัดหาหรือซื้อโปรแกรมได้อย่างถูกต้องตามลิขสิทธิ์ง่าย

โดยการนำมาพัฒนาเป็นกรณีศึกษากับนักศึกษาปริญญาโทสาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษาสารสนเทศ 2 คน นักศึกษา เอกคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์จำนวน 33 คน ซึ่งเป็นนักศึกษาที่มีความรู้ความสามารถ ในการใช้โปแกรม GSP อยู่ ในระดับดี เพราะว่านักศึกษาทุกคน ได้เรียนการใช้โปรแกรม GSP มาตลอด 1 ภาคเรียน และทุกคน ได้เรียนเรื่อง การแก้โจทย์ปัญหาค่าสูงสุดต่ำสุดของฟังก์ชันมาแล้วทุกคน โดยมี วัตถุประสงค์ 2 ประการ คือประการแรก

เพื่อศึกษาการนำโปรแกรม GSP มาใช้ใน การแก้โจทย์ปัญหา ค่าสูงสุดต่ำสุดของฟังก์ชัน ของนักศึกษาที่มีทักษะการใช้โปรแกรม GSP ประการที่สอง เพื่อพัฒนาโมเดล การแก้โจทย์ปัญหาค่าสูงสุดต่ำสุดของฟังก์ชัน โดยใช้ GSP ซึ่งผลที่คาดว่าจะได้จากการพัฒนาโมเดลของการแก้โจทย์ปัญหาค่าสูงสุดต่ำสุดของฟังก์ชันที่สามารถนำมาใช้ประกอบการสอนเรื่องการแก้โจทย์ปัญหา สำหรับ นักศึกษาในคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีทุกสาขาวิชา ซึ่งเป็นการฝึกทักษะ /กระบวนทาง คณิตศาสตร์ มาใช้ใน การแก้โจทย์ปัญหาดังกล่าว

2. ขั้นตอนการสร้างโมเดลการแก้โจทย์ปัญหาค่าสูงสุดต่ำสุดของฟังก์ชันโดยใช้ (GSP)

ผู้วิจัยได้กำหนดความหมายของปัญหาไว้ว่า หมายถึง สถานการณ์ที่เผชิญอยู่และต้องการค้นหาคำตอบโดยที่ยังไม่ทราบวิธีการหรือขั้นตอนที่จะได้มาซึ่งคำตอบในทันทีทันใด ส่วนปัญหาทางคณิตศาสตร์ ก็หมายถึง ปัญหา ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ และการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึงกระบวนการ ในการประยุกต์ ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ขั้นตอน/กระบวนการแก้ปัญหา ยุทธวิธีแก้ปัญหาและประสบการณ์ ที่มีอยู่ไปใช้ในการค้นหาคำตอบของปัญหาคณิตศาสตร์(สสวท. 2550 : 7) บุคคลที่ได้รับการกล่าวถึง ผลงานของท่านมาก คือโพลยา(Polya ,1962 : V) ได้อธิบายความหมายของการแก้ปัญหาอย่างง่ายๆ ดังนี้ คือ การแก้ปัญหาเปรียบเสมือนกับการฝึกหัดอย่างเป็นศิลปะ เช่นเดียวกับการฝึกว่ายน้ำ การเล่นสกี หรือการ เล่นเปียโน ซึ่งเป็นการเลียนแบบและการฝึกทักษะอย่างสม่ำเสมอ ดังนั้นโพลยาจึงได้สรุปขั้นตอนของ การแก้ปัญหาไว้ทั้งหมด 4 ขั้นตอนดังนี้ คือ

ขั้นที่ 1 ขั้นทำความเข้าใจปัญหา
ขั้นที่ 2 ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา
ขั้นที่ 3 ขั้นดำเนินการตามแผน
ขั้นที่ 4 ขั้นตรวจสอบผล

จากแนวทางการแก้โจทย์ปัญหาของโพลยา สามารถนำมาใช้เป็นแนวทางในการแก้โจทย์ปัญหา ค่าสูงสุดต่ำสุดของฟังก์ชันซึ่งการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการหาค่าสูงสุดต่ำสุดของฟังก์ชันซึ่งเป็นการประยุกต์ของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ซึ่งประกอบด้วยขั้นตอนดังนี้คือ (James Stewart , 2003 : 278)

ขั้นที่ 1 ขั้นทำความเข้าใจปัญหา
ขั้นที่ 2 เขียนแผนภาพเพื่อแสดงสิ่งที่เกี่ยวข้อง
ขั้นที่ 3 กำหนดสัญลักษณ์ของตัวแปรหรือปริมาณที่ต้องการค่าสูงสุดหรือต่ำสุด
ขั้นที่ 4 กำหนด Q ให้อยู่ในรูปในพจน์ของปริมาณที่เกี่ยวข้องทั้งหมด
ขั้นที่ 5 สร้างฟังก์ชัน f(x) ซึ่งเป็นฟังก์ชันตัวแปรเดียวจากขั้นที่ 3
ขั้นที่ 6 ใช้กระบวนการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดสัมบูรณ์

เนื่องจากนักศึกษาทุกคนมีความรู้ความสามารถในการใช้โปรแกรม GSP อยู่ในระดับดี ทำให้ผู้วิจัยต้องการนำความรู้ทั้งสองอย่างมาบูรณาการ ซึ่งจะทำให้นักศึกษานำวิธีการดังกล่าวไปใช้ประกอบการเรียนการสอน คณิตศาสตร์ในส่วนของทักษะ/ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ โดยเริ่มต้นจากการให้โจทย์ปัญหาที่เป็นภาษาอังกฤษคนละ 1 ข้อไม่ซ้ำกัน ให้เวลาในการส่งภายในเวลา 1 สัปดาห์ โดยกำหนดหัวข้อในการแก้โจทย์ปัญหาไว้ชัดเจน และนักศึกษาสามารถสอบถามข้อสงสัยด้านเนื้อหาคณิตศาสตร์กับผู้วิจัยได้โมเดล ของการแก้โจทย์ปัญหาดังกล่าวที่ผู้วิจัยพัฒนา มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. แปลโจทย์ปัญหาจากภาษาอังกฤษเป็นภาษาไทย และทำความเข้าใจปัญหา
2. กำหนดปริมาณที่เกี่ยวข้องจากโจทย์ปัญหาเพื่อกำหนดเป็นตัวแปรต้นและตัวแปตามพร้อมระบุหน่วยของปริมาณทั้งหมด
3. สร้างฟังก์ชันแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต้นและตัวแปรตามในรูปของฟังก์ชันหนึ่ง ตัวแปร และบอกโดเมนของฟังก์ชันได้
4. สร้างแผนภาพหรือรูป อาจจะเป็นรูปสองมิติหรือสามมิติก็ได้โดยใช้โปรแกรม GSP
5. สร้างตารางแสดงค่าของตัวแปรต้นและตัวแปรตาม แล้วลงจุดจากตารางในระบบพิกัดฉาก
6. สร้างรอยขีดและโลคัสหรือทางเดินของจุด แสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต้นและตัวแปรตาม ใน ระบบพิกัดฉาก
7. เขียนกราฟของฟังก์ชันในข้อ 3
8. หาค่าของตัวแปรต้นที่ทำให้ได้ค่าสูงสุดต่ำสุดของฟังก์ชันภายใต้โดเมนที่กำหนดไว้
9. ตรวจสอบคำตอบด้วยวิธีการทางแคลคูลัสและเรียบเรียงวิธีการแก้ปัญหา
10. นำเสนอวิธีการแก้โจทย์ปัญหาค่าสูงสุดต่ำสุดของฟังก์ชันพร้อมทั้งสรุปขอเท็จจริงหรือทฤษฎีที่ค้นพบ ซึ่งสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับโจทย์ปัญหาที่มีลักษณะคล้ายกันได้

ผู้วิจัยนำโมเดลข้างต้นมาสร้างเป็นตัวอย่างโดยไม่อธิบายวิธีการสร้างใด ๆ นักศึกษาต้องศึกษาและหาแนวทางการสร้างจากความรู้การใช้เครื่องมือ GSP ที่ได้เรียนไปด้วยตนเอง นักศึกษาเกือบทุกคนจะเข้า เว็ปไซต์ http://www.web.ssru.ac.th/ubon/ ซึ่งตัวอย่างที่นำเสนอทั้งหมดจะประกอบด้วย 10 ขั้นตอนแต่ไม่ได้บอกอย่างชัดเจนว่าเป็นขั้นตอนที่เท่าไร เพราะต้องการให้นักศึกษารู้จักการสังเกตและการวิเคราะห์ เช่นตัวอย่างดังต่อไปนี้ ซึ่งผู้วิจัยมีขั้นตอนการแก้ปัญหาดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 แปลโจทย์

A segment (AD) of length w is trisected, and the left and right sides are bent upwards at an angle x. What angle maximizes the area of the trapezoid formed?

ส่วนของเส้นตรง AD ยาว W หน่วย ถูกแบ่งออกเป็น 3 ส่วนเท่า ๆ กัน หักส่วนทางซ้ายและทางขวาขึ้นไปเป็นมุม ขนาด x จงหาขนาดของมุมที่ทำให้พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมูมีค่ามากที่สุด

จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ต้องการทราบว่าส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่งที่แบ่งออกเป็น 3 ส่วนเท่า ๆ กัน ถ้าพับส่วนที่อยู่ทางซ้ายและทางขวาขึ้นไปเป็นมุมขนาดต่าง ๆ กัน ทำให้ส่วนของเส้นตรงทั้ง 3 ส่วน ประกอบ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูที่มีขนาดของพื้นที่แตกต่างกันออกไปทั้งนี้ขึ้นอยู่กับขนาดของมุมที่พับขึ้นไปแล้วขนาดของมุม ดังกล่าวจะเป็นเท่าใด จึงจะทำให้รูปสี่เหลี่ยมคางหมูมีพื้นที่มากที่สุด

ขั้นที่ 2 กำหนดปริมาณ ตัวแปรต้นและตามแปรตาม

พิจารณาจากปัญหาที่ต้องการทราบว่า จะต้องพับส่วนของเส้นตรงไปเป็นมุมที่มีขนาดเท่าใดจึงจะทำให้ส่วนของเส้นตรงที่พับขึ้นไปเป็นมุม x นั้นประกอบเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูที่มีพื้นที่มากที่สุด ดังนั้นปริมาณที่สำคัญประกอบด้วยดังนี้ คือ

W แทน ความยาวของส่วนของเส้นตรง AD

x แทนขนาดของมุมที่พับขึ้นไป มีหน่วยเป็นองศา

h แทนความสูงของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

A แทนพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมู

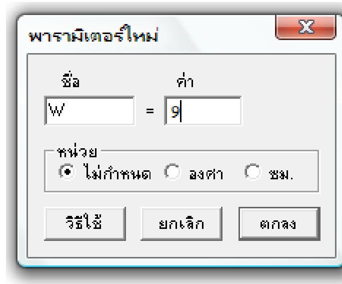
จะเห็นว่าขนาดของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมูจะเปลี่ยนไปตามขนาดของมุมที่พับขึ้นไป ดังนั้น

ตัวแปรต้น (x) คือขนาดของมุมที่พับขึ้นไปซึ่งมีค่าเท่ากับ x องศา และ

ตัวแปรตาม (y) คือขนาดของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมู

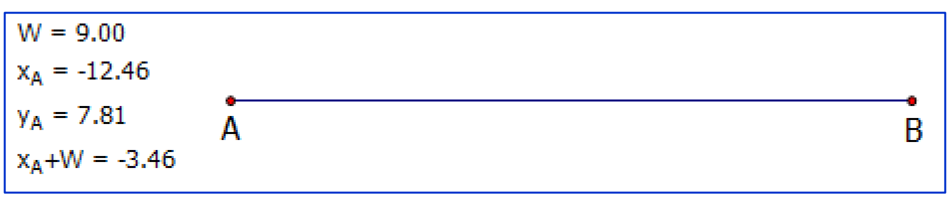
ขั้นตอนการสร้างค่าปริมาณต่าง ๆ โดยใช้ GSP สามารถทำได้ดังนี้คือ

1. กำหนดพารามิเตอร์ W เท่ากับค่า ๆ หนึ่งสมมุติว่าเท่ากับ 9 หน่วย เลือกเมนู กราฟ พารามิเตอร์ ใหม่ จะได้กล่องสี่เหลี่ยม พิมพ์ในช่องชื่อด้วยอักษร W และ ช่อง ค่า เป็น 9 แล้วเลือก ตกลง



ภาพ 1 แสดงการกำหนดค่าพารามิเตอร์

2. สร้างส่วนของเส้นตรงให้ยาวเท่ากับ W หน่วยในระบบพิกัดฉาก โดยเลือกเมนูกราฟ กำหนดระบบพิกัด จะได้ระบบพิกัดฉาก XY
    - กำหนดจุดอิสระหนึ่งจุด เป็นจุด A โดยเลือกเครื่องมือลงจุด
    - วัดพิกัดที่หนึ่ง และพิกัดที่สอง โดยเลือกจุด A ตามด้วยเมนู วัด พิกัดที่หนึ่ง(x) และพิกัดที่สอง (y)
    - คำนวณค่า $x_A + W$ ได้จากการเลือกเมนู วัด ตามด้วย คำนวณ จะได้กล่องการคำนวณ ใหม่ ให้เลือกค่า $x_A +$ และค่า W แล้วเลือก ตกลง
    - ลงจุด $x_A + W$ กับ y_A โดยเลือก $x_A + W$ และ y_A ตามลำดับ ตามด้วยเมนู กราฟ และ ลงจุดแบบ (x, y) จะได้จุดหนึ่งจุดให้เป็นจุด B
    - สร้างส่วนของเส้นตรง AB ด้วยการเลือก จุด A และจุด B ตามด้วยเมนูสร้างและเมนูย่อยส่วนของเส้นตรง จะได้ส่วนของเส้นตรงที่ยาวเท่ากับ $W = 9$ หน่วย



ภาพ 2 แสดงการสร้างส่วนของเส้นตรงตามความยาวที่กำหนด

ขั้นที่ 3 สร้างฟังก์ชัน

หาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต้น (x) และ ตัวแปรตาม (y) ในรูปของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร หรือ $y = f(x)$ โดยพิจารณาจาก พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมู $= \frac{1}{2} \times$ (ผลบวกของด้านคู่ขนาน $\times$ สูง

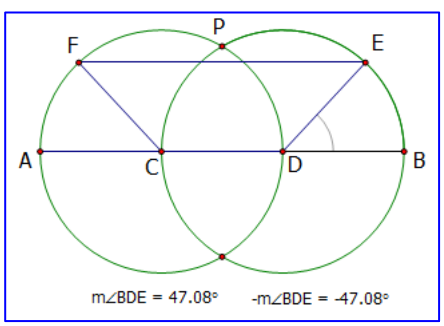
ดังนั้นจะต้องหาความยาวของด้านคู่ขนานแต่ละด้านและความสูงให้อยู่ในรูปของตัวแปร x ถ้ายังไม่สามารถที่จะสร้างฟังก์ชัน $y = f(x)$ ได้ อาจจะสร้างแผนภาพหรือรูป ช่วยให้มองภาพได้ชัดเจนก่อน

ขั้นที่ 4 สร้างแผนภาพหรือรูป

การสร้างรูปสี่เหลี่ยมคางหมูที่สอดคล้องกับสิ่งที่กำหนดให้ นั่นคือด้านข้างทั้งสองด้านเกิดจาก การแบ่งส่วนของเส้นตรงออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กันแล้วจึงพับด้านข้างทั้งสองด้านไปเป็นมุม x องศา จะเกิดเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูตามต้องการ ดังนี้

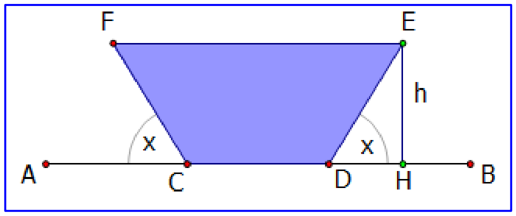
1. แบ่งส่วนของเส้นตรง AB ออกเป็น 3 ส่วนเท่า ๆ กัน
   - คำนวณหาค่าของ $\frac{W}{3}$ โดยใช้เมนูวัด แล้วคำนวณค่าของ $\boxed{\frac{W}{3} = 3.00}$ และคำนวณ $\boxed{x_A+\frac{W}{3} = -8.48}$
   - ลงจุด $(x_A + W, y_A)$ และกำหนดให้เป็นจุด C โดยที่ $AC = \frac{W}{3} = 3$
   - หาจุดแบ่งจุดที่สอง และให้เป็นจุด D โดยใช้การเลื่อนขนานด้วยการระบุเวกเตอร์นั่นคือเลือก จุด A และ C ตามลำดับ แล้วเลือกเมนู การแปลง และระบุเวกเตอร์ แล้วเลือกจุด C กับเมนูการแปลง และเมนู่ย่อยเลื่อนขนาน จะได้จุด D

3. พับด้าน DB และ CA ขึ้นไปเป็นมุมขนาด x องศา โดยการสร้างวงกลมสองวง ซึ่งให้ D และ C เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี เท่ากับ CA และ DB ตามลำดับ วงกลมทั้งสองตัดกันที่จุด P
   - สร้างส่วนโค้ง BP โดยเลือกจุด D , B และ P ตามลำดับ แล้วเลือกเมนู สร้าง และเมนู ย่อย ส่วนโค้งบนวงกลม
   - กำหนดให้ E เป็นจุด บนส่วนโค้ง BP แล้วสร้างส่วนของเส้นตรง DE
   - วัดขนาดของมุม BDE และคำนวณขนาดของมุม $-$BDE
   - หมุนจุด A ไปเป็นมุม $-$BDE ที่ใช้ C เป็นจุดศูนย์กลาง จุดที่หมุนไปให้เป็นจุด F
   - ลากส่วนของเส้นตรงประกอบกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ดังภาพข้างล่างนี้



ภาพ 3 แสดงวิธีการสร้างรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

   - ซ่อนวงกลมและวัตถุที่ไม่การแสดง
   - ลากส่วนสูงของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู จากจุด E มาตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ที่จุด H



ภาพ 4 แสดงการสร้างภาพเพื่อใช้ในการสร้างฟังก์ชัน

จากภาพที่สร้างขึ้นจะทำให้หาค่าของพื้นที่ในรูปของตัวแปร x ง่ายขึ้น ซึ่ง $EF = CD + 2DH$ และ $DH = DE\cos x = \frac{w}{3}\cdot\cos x$ ส่วน $h = \frac{w}{3}\cdot\sin x$ ดังนั้น

$$\text{พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมู } CDEF = \frac{1}{2}\times\left[CD + EF\right]\times h$$

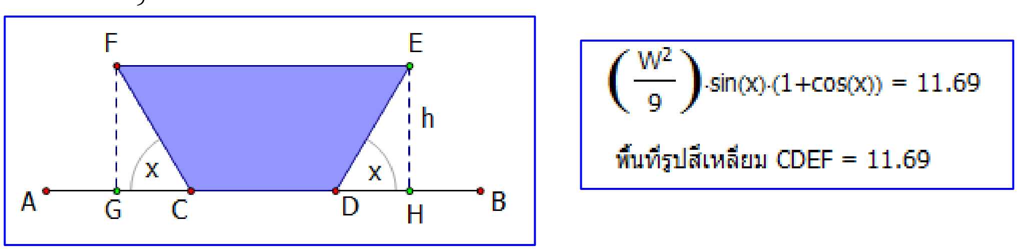
$$= \frac{1}{2}\times\left[\frac{w}{3} + \left(\frac{w}{3} + 2\frac{w}{3}\cdot\cos x\right)\right]\times\frac{w}{3}\cdot\sin x$$

$$= \frac{w^2}{9}(\sin x)(1+\cos x)$$

ดังนั้นฟังก์ชันที่ต้องการคือ $A = \frac{w^2}{9}(\sin x)(1+\cos x)$ หรือ

$$f(x) = \frac{w^2}{9}(\sin x)(1+\cos x)$$

จะเห็นว่าโดเมนของฟังก์ชัน หรือ ค่าของ x ที่เป็นไปได้ทั้งหมด คือ $0^\circ \le x \le 120^\circ$ หรือ $\left\{x \,\middle|\, 0 \le x \le \frac{2\pi}{3}\right\}$

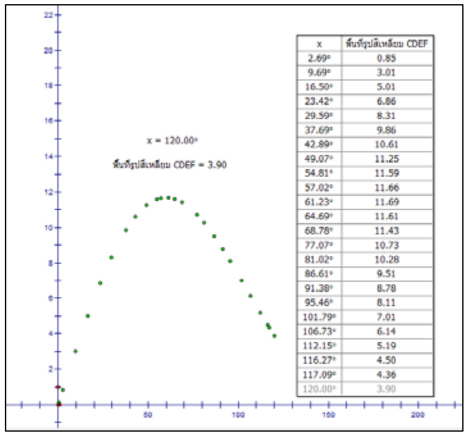


ภาพ 5 แสดงการคำนวณหาค่าพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมู ที่ ค่าของมุม x ต่าง ๆ

ขั้นที่ 5 สร้างตารางเพื่อลงจุด

1. สร้างตารางแสดงค่าของ x และพื้นที่ $f(x)$ เพื่อหาค่าคาดเดาว่า x จะเป็นเท่าไรจึงจะทำให้พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมูมีค่ามากที่สุด โดยเลือก ค่า x และ พื้นที่รูปสี่เหลียม CDEF แล้วเลือกเมนู กราฟ และ สร้างตาราง เพิ่มตารางด้วยการคลิกสองครั้งที่ตารางพร้อมทั้งเลื่อนจุด E ที่เริ่มต้น จากค่า x ที่เป็น 0 และเพิ่มค่า x ไปเรื่อย ๆ ประมาณ 20 ค่า

2. ลงจุดในตาราง ด้วยการเลือกตาราง และเลือกเมนูกราฟ และ ลงจุดข้อมูลในตาราง จะได้ภาพดังข้างล่างนี้



x	พื้นที่รูปสี่เหลี่ยม CDEF
2.69°	0.85
9.69°	3.01
16.50°	5.01
23.42°	6.86
29.59°	8.31
37.69°	9.86
42.89°	10.61
49.07°	11.25
54.81°	11.59
57.02°	11.66
61.23°	11.69
64.69°	11.61
68.78°	11.43
77.07°	10.73
81.02°	10.28
86.61°	9.51
91.38°	8.78
95.46°	8.11
101.79°	7.01
106.73°	6.14
112.15°	5.19
116.27°	4.50
117.09°	4.36
120.00°	3.90

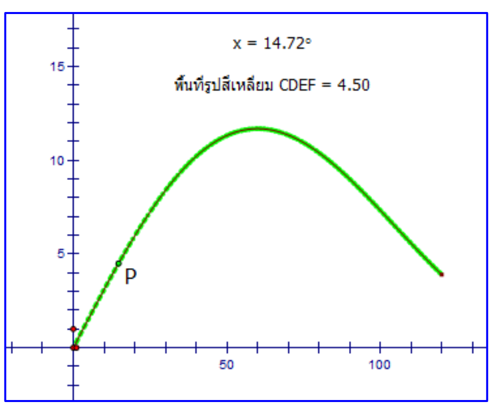
ภาพ 5 แสดงการลงจุดจากตารางของค่า x และพื้นที่ $f(x)$

จากตารางและการลงจุดในตารางจะเห็นว่า x ที่ทำให้พื้นที่มีค่ามากที่สุดน่าจะเป็น 60°

ขั้นที่ 6 สร้างรอยขีดและโลคัส

สร้างรอยขีดและโลคัสเพื่อให้มองเห็นความสัมพันธ์ระหว่าง x กับ พื้นที่เป็นไปอย่างต่อเนื่อง ซึ่งทำได้ ดังนี้คือ

1. ลงจุด P ด้วยการเลือกค่า x และพื้นที่รูปสี่เหลี่ยม CDEF แล้วเลือกเมนูกราฟ ตามด้วยเมนูย่อย ลงจุด แบบ (x, y)
2. สร้างรอยขีด โดยเลือกจุด P แล้วเลือกเมนูแสดงผลและเมนูย่อย สร้างรอยจุดที่เขียนแล้ว
3. สร้างปุ่มการเคลื่อนที่ให้กับจุด E จะได้รอยขีดของจุด P เป็นเส้นโค้งที่สอดคล้องกับจุดที่ลงไว้จากตาราง
4. สร้างโลคัสด้วยการเลือก จุดอิสระ E และจุด P แล้วจึงเลือกเมนู สร้าง ตามด้วย เมนูย่อยโลคัส



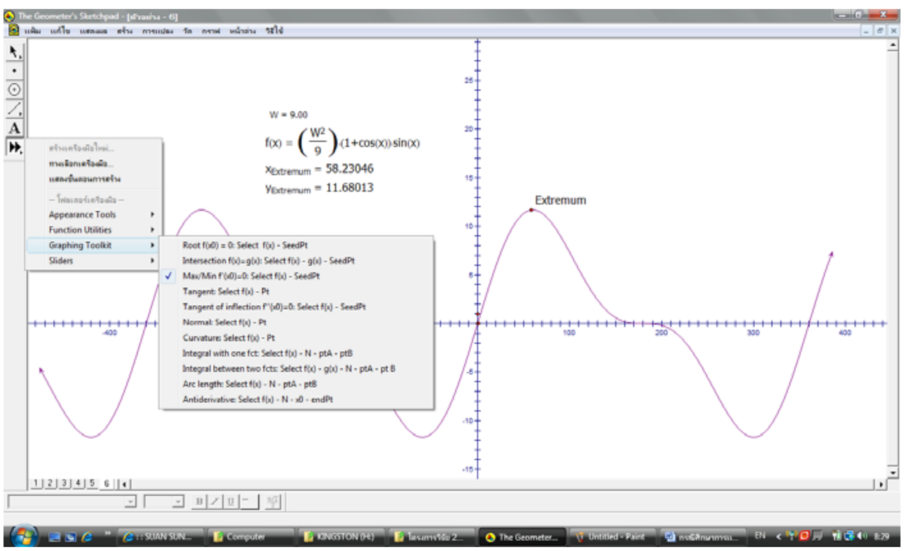
ภาพ 6 แสดงรอยขีดและโลคัส

ขั้นที่ 7 เขียนกราฟของฟังก์ชัน

เลือกเมนู กราฟและเมนูย่อย ฟังก์ชันใหม่ พิมพ์ฟังก์ชัน $f(x)=\frac{W^2}{9}(\sin x)(1+\cos x)$ แล้วเลือก ฟังก์ชัน ตามด้วยเมนูกราฟ และเมนูย่อย วาดกราฟของฟังก์ชันใหม่

ขั้นที่ 8 พิจารณาหาค่าสูงสุดต่ำสุดของฟังก์ชัน

หาค่าสูงสุดต่ำสุดของฟังก์ชันโดยใช้ GSP เลือกเมนูเครื่องมือกำหนดเอง เมนู Graphing Toolkit ตามด้วย เมนูย่อย Max/Min f”9x) = 0 ,Select f(x) – Seed Pt และ เลือกฟังก์ชัน $f(x)=\frac{W^2}{9}(\sin x)(1+\cos x)$ แล้วนำเคอเซอร์ไปวางใกล้ ๆ กับจุดที่เป็นจุดสูงสุดของฟังก์ชันในช่วงของ $0^\circ \le x \le 120^\circ$ หรืออาจจะใช้ $0 \le x \le \frac{2\pi}{3}$ ก็ได้ จะได้ ค่า x ที่ทำให้ $f(x)=\frac{W^2}{9}(\sin x)(1+\cos x)$ มีค่าสูงที่สุดพร้อมทั้งแสดงค่าสูงสุดดัง ภาพต่อไปนี้



ภาพ 7 แสดงการเลือกใช้เครื่องมือกำหนดเองในการหาค่าสูงสุดต่ำสุดของฟังก์ชัน

ขั้นที่ 9 ตรวจสอบความถูกต้องด้วยวิธีของแคลคูลัส

เป็นขั้นที่นักศึกษาจะต้องใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ในเรื่องของการประยุกต์ค่าสูงสุดต่ำสุดของฟังก์ชัน ดังนี้

เนื่องจากพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมู

จากฟังก์ชัน $f(x)=\frac{W^2}{9}(\sin x)(1+\cos x)\ \ ,\ \ 0^\circ \le x \le 120^\circ$

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{W^2}{9}(\sin x)(1+\cos x)\right]$$

$$=\frac{W^2}{9}\left[\sin x\cdot\frac{d}{dx}(1+\cos x)+(1+\cos x)\cdot\frac{d}{dx}(\sin x)\right]$$

$$=\frac{W^2}{9}\left[\sin x\cdot(-\sin x)+(1+\cos x)\cdot(\cos x)\right]$$

$$=\frac{W^2}{9}\left[-\sin^2 x+\cos x+\cos^2 x)\right]$$

หาค่า x ที่ทำให้ $f'(x)=0 \triangleright$ จะได้ว่า $\frac{W^2}{9}\left[-\sin^2 x+\cos x+\cos^2 x)\right]\ =\ 0$

$$-\sin^2 x+\cos x+\cos^2 x\ =\ 0$$

$$-(1-\cos^2 x)+\cos x+\cos^2 x\ =\ 0$$

$$2\cos^2 x+\cos x-1\ =\ 0$$

$$(\cos x+1)(2\cos x-1)\ =\ 0$$

$$\cos x\ =\ -1,\frac{1}{2}$$

$$x\ =\ 180^\circ\ ,60^\circ$$

ตรวจสอบค่า x ที่ทำให้ $f(x)$ มีค่าสูงสุดในช่วง $0^\circ \le x \le 120^\circ$ จะได้ว่า $x\ =\ 60^\circ$ จะได้ค่า $f(x)$ ที่สูงที่สุด คือ $f(x)=\frac{9^2}{9}(\sin 60^\circ)(1+\cos 60^\circ)\approx 11.68013$ หรือในกรณีทั่วไป

$$f(x)=\frac{W^2}{9}(\sin 60^\circ)(1+\cos 60^\circ)$$

ขั้นที่ 10 ขั้นนำเสนอ

เป็นขั้นตอนของการนำความรู้ด้านคณิตศาสตร์และศิลปะมาใช้ในการนำเสนอขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาตั้งแต่เริ่มต้นจนถึงขั้นค้นพบข้อความจริงต่าง ๆ นักศึกษาแต่ละคนจะมีความคิดสร้างสรรค์เป็นของ ตนเอง เลือกรูปแบบที่เหมาะสม สวยงาม จากโจทย์ปัญหาที่ว่า

> ส่วนของเส้นตรง AD ยาว W หน่วย ถูกแบ่งออกเป็น 3 ส่วนเท่า ๆ กัน
> หักส่วนทางซ้ายและทางขวาขึ้นไปเป็นมุม ขนาด x จงหาขนาดของ
> มุมที่ทำให้พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมูมีค่ามากที่สุด

จะพบว่าขนาดของมุมที่ทำให้พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมูมีพื้นที่มากที่สุดคือ $x = 60^{\circ}$ และ ค่าของ พื้นที่ที่มากที่สุด คือ $f(x) = \frac{W^2}{9}(\sin 60^{\circ})(1+\cos 60^{\circ})$

ข้อเสนอแนะในการสำรวจเพิ่มเติมจากโจทย์ปัญหานี้ คือ

1. ขนาดของมุมที่ทำให้พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมูมีค่ามากที่สุดจะเปลี่ยนไปหรือไม่ ถ้าปรับเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ของ W
2. ถ้าแบ่งส่วนของเส้นตรง AD เป็น 3 ส่วน แต่ไม่จำเป็นต้องเท่ากันขนาดของมุมจะคงเดิมหรือไม่
3. จากข้อเท็จจริงที่ค้นพบนี้ สามารถนำไปใช้ประโยชน์ในชีวิตประจำวันเรื่องใดบ้าง เช่น นำไปประยุกต์ในการสร้างรางน้ำที่รองรับปริมาณน้ำได้มากที่สุด เป็นต้น

จะเห็นว่าโมเดลการแก้โจทย์ปัญหาค่าสูงสุดต่ำสุดของฟังก์ชันทั้ง 10 ขั้นตอนนี้ ถึงแม้ว่าจะมี ขั้นตอน มากถึง 10 ขั้นตอนก็ตาม แต่ผู้วิจัยมองเห็นว่าทุก ๆ ขั้นตอนจะส่งเสริมให้นักศึกษามีทักษะ/ กระบวน การคิดทางคณิตศาสตร์เป็นอย่างดี โดยไม่ได้เน้นว่าทำอย่างไรจึงจะได้คำตอบที่เร็วที่สุดโดยที่ไม่ได้คิดวิเคราะห์ตาม กระบวนการที่ควร จะเป็นไป ตามจุดประสงค์ของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

3. กรณีศึกษา

หลังจากที่ทุกคนได้รับโจทย์ปัญหาแล้วจะเห็นว่าทุกคนตื่นเต้นมาก บางคนก็วิตกกังวลว่าจะแปล โจทย์แล้วไม่เข้าใจ บางคนอาจจะได้รับโจทย์ที่ยุ่งยากซับซ้อนบ้าง ซึ่งอาจารย์จะเลือกโจทย์ข้อที่ยากให้กับนักศึกษาที่เรียนดี ถ้านักศึกษาที่แปลโจทย์แล้วไม่เข้าใจเท่าที่ควร สามารถขอคำแนะนำหรือปรึกษากับ เพื่อน ๆ ได้ อาจจะมีบางคนที่ใช้โปรแกรมสำเร็จรูปในการแปล จากอินเทอร์เน็ต ผู้วิจัยมีความรู้สึกว่านี่เป็น บรรยากาศของการเรียนรู้ที่แท้จริง เหตุที่ ผู้วิจัยไม่ให้โจทย์ข้อเดียวกันนั้นเพราะว่าไม่สามารถควบคุมว่านักศึกษาจะไม่คัดลอกงานกันมาส่ง ผู้วิจัยเปิดโทรศัพท์มือถือไว้ตลอดเวลาเพื่อให้คำปรึกษา นักศึกษาจะ ติดตามหาอาจารย์อยู่ตลอดเวลา กล้าถาม กล้าตอบ บางครั้งก็แสดงความคิดเห็นว่า เป็นครั้งแรกที่ได้รู้จักการค้นคว้าหาความรู้ด้วยตนเองทำให้รู้จักคิด หาเหตุผลผู้วิจัย ได้รวบรวมและสังเกตพฤติกรรมของนักศึกษาระดับปริญญาตรี สาขาคณิตศาสตร์ 31 คน และนักศึกษาปริญญาโท สาขาคณิตศาสตร์ ศึกษาสารสนเทศ 2 คน ในการแก้โจทย์ปัญหาตามโมเดลที่วางไว้ ซึ่งอาจจะปรับเปลี่ยนหรือ ประยุกต์ได้ตามความเหมาะสม ในแต่ละขั้นตอนได้ผลดังนี้ คือ

ตาราง 1 แสดง เปอร์เซ็นต์ของนักศึกษาที่ทำได้ในแต่ละขั้นตอนของโมเดลการแก้โจทย์ปัญหา ค่าสูงสุดต่ำสุดของฟังก์ชันโดยใช้ GSP

ขั้นที่	กิจกรรม	เปอร์เซนต์ของนักศึกษาที่ทำได้
1	แปลโจทย์	100.00
2	กำหนดปริมาณ ตัวแปรต้นและตามแปรตาม	80.30
3	สร้างฟังก์ชัน	75.76
4	สร้างแผนภาพหรือรูป	90.90
5	สร้างตารางเพื่อลงจุด	57.58
6	สร้างรอยขีดและโลคัส	56.82
7	เขียนกราฟของฟังก์ชัน	65.15
8	พิจารณาหาค่าสูงสุดต่ำสุดของฟังก์ชัน	50.00
9	ตรวจสอบความถูกต้องด้วยแคลคูลัส	40.90
10	ขั้นนำเสนอ	80.00

จากตารางข้างต้นแสดงให้เห็นว่านักศึกษาทั้งหมดที่เป็นกรณีศึกษา สามารถแปลโจทย์ภาษาอังกฤษ ได้ทุกคน ทั้งนี้เพราะว่าจะต้องเข้าใจโจทย์ปัญหาเป็นอย่างดี จึงจะแก้ปัญหาได้ นักศึกษา จะปรึกษากัน ค้นคว้าถามอาจารย์ ซึ่งถ้าไม่เข้าใจหรือแปลโจทย์ผิดจะทำให้ทุกขั้นตอนผิดหมด ส่วนความสามารถใน การใช้โปรแกรม GSP ในการสร้างแผนภาพและการนำเสนอที่แสดงการเคลื่อนไหวได้ดีมาก เรื่องที่จะต้อง ปรับปรุง และทำความเข้าใจให้มากขึ้นคือเรื่องของการกำหนดตัวแปรต้น ตัวแปรตาม การสร้างฟังก์ชัน ถ้านักศึกษากำหนดฟังก์ชันไม่ถูกต้อง จะทำให้การสร้างตาราง เพื่อลงจุด การสร้างรอยขีดและโลคัสจะผิด ตามไปด้วย โดยที่นักศึกษาจำนวนมากยังไม่สามารถพิจารณา และตรวจสอบความถูกต้องได้

ด้วยเหตุนี้เองที่ผู้วิจัยมีความสนใจที่จะศึกษาหา แนวทางในการสร้างทักษะ/ กระบวนการทาง คณิตศาสตร์ ให้กับนักศึกษาในระดับต่าง ๆ กับทุก ๆ เนื้อหาของวิชาคณิตศาสตร์ในทุก ๆ ระดับชั้นโดยนำ GSP มาเป็นกิจกรมที่สร้างความสนใจและกระตุ้นให้เกิดความคิดที่ถูกต้อง โดยที่ไม่ทิ้งส่วนที่เป็นเนื้อหาเดิม เพียงแต่ปรับเปลี่ยน กระบวนการเรียนการสอนไม่น่าเบื่อและให้ทันสมัยต่อการเปลี่ยนของเทคโนโลยีสารสนเทศต่าง ๆ

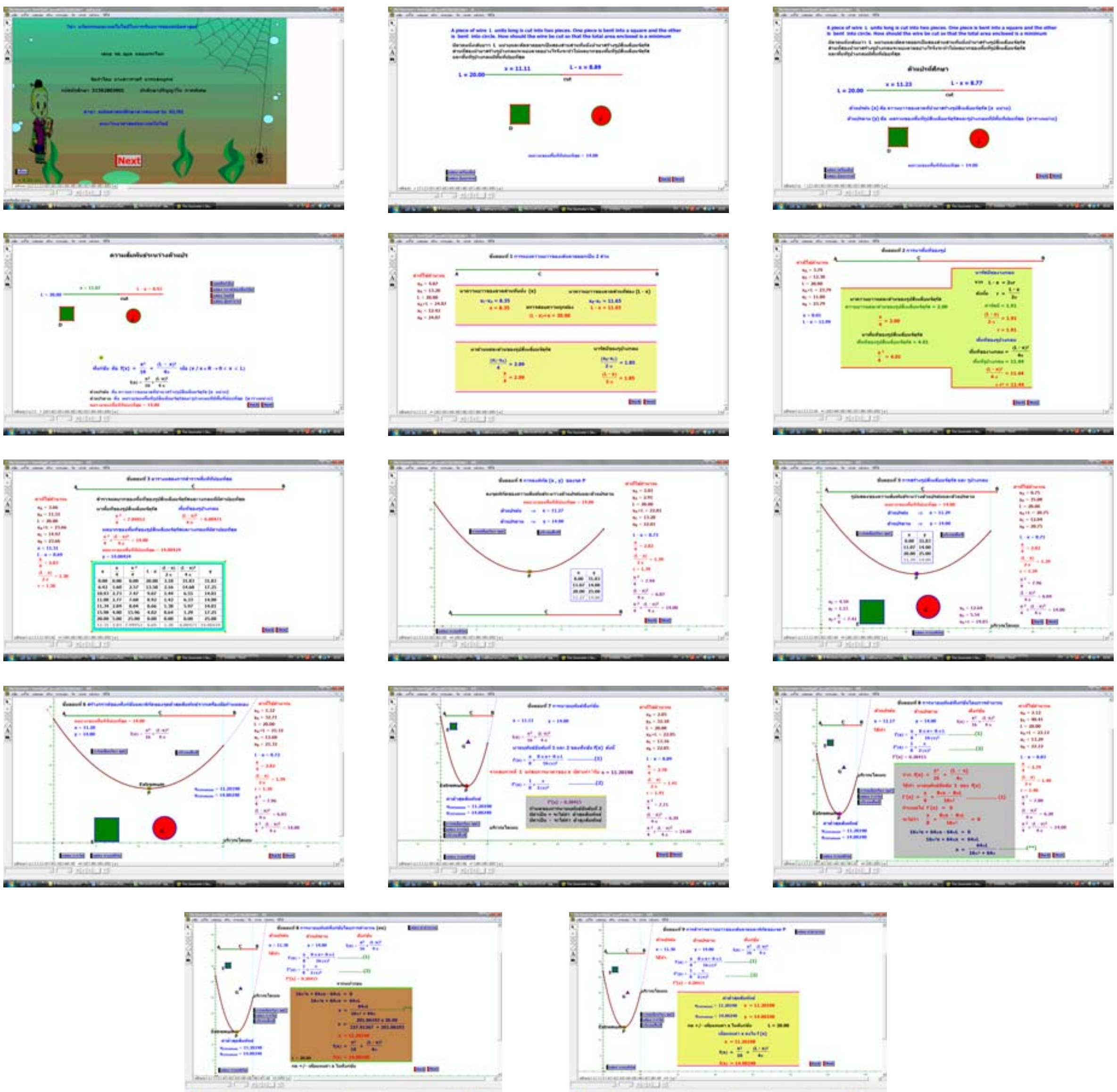
4. ตัวอย่างผลงาน

ตัวอย่างผลงาน การแก้โจทย์ปัญหาค่าสูงสุดต่ำสุดของฟังก์ชันโดยใช้ GSP ของนักศึกษา ระดับปริญญาโท

คนหนึ่งที่สอนในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย และมีความสามารถในการใช้โปรแกรม GSP ในระดับดี ซึ่งแสดงขั้นตอนของโมเดลดังกล่าวได้เป็นอย่างดี ดังนี้

A piece of wire L units long is cut into two pieces. One piece is bent into a square and the other is bent into circle. How should the wire be cut so that the total area enclosed is a minimum?

มีลวดหนึ่งเส้นยาว L หน่วยและตัดลวดออกเป็นสองส่วนส่วนที่หนึ่งนำมาสร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ส่วนที่สองนำมาสร้างรูปวงกลมจะแบ่งลวดอย่างไรจึงจะทำให้ผลบวกของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและพื้นที่รูปวงกลมมีพื้นที่น้อยที่สุด



ภาพ 8 แสดง ตัวอย่างการนำเสนอผลงานของนักศึกษาทั้ง 10 ขั้นตอนของ การแก้โจทย์ปัญหาค่าสูงสุดต่ำสุดของฟังก์ชันโดยใช้ GSP

บรรณานุกรม

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ,สถาบัน. (2550). ทักษะ/ กระบวนการทางคณิตศาสตร์. กรุงเทพมหานคร. คุรุสภาลาดพร้าว.

[1] Danniel , S. and others (2005). Exploring Precalculus with The Geometer's Sketchpad. CA: Key Curriculum.

[2] Howard Anton , Irl Bivens and Stephen Davids . (2005) Calculus eight edition. NJ : John wiley & sons, Inc.

[3] James Stewart.(2003) , Single Variable Calculus. CA : Thomson Learning , Inc.

[4] Roberts, A. Wayne (1995). Faces or Mathematics, Third Edition. New York, NY USA: Haper Collins College Publishers, 479.