学科知识,创造性与技术

杨玮琦

美国 Radford 大学数学系
Radford, Virginia 24142, USA
e-mail: wyang@radford.edu

Translated by Yaohua Hu (胡耀华) and Jiyan Wang (王继延)

摘要

我们一直争论不休的一个问题是：我们期望一位未来的数学教师——他或她，在开始教学之前，究竟应该具备多少的数学学科知识。许多教育工作者并不同意单纯依据考试测定一个人的数学知识，而这已经导致将很多知识内容被塞进数学课程。问题的实质在于一个人如何才能建立起对数学的毕生的兴趣爱好，以及怎样才能创造性地解决他们平时遇到的问题。技术的创新应用能提供一些有益的帮助吗？总之，一般而言，对于数学课程我们可以有如下的一致意见：

1. 我们可以预计，为了提高学生的数学知识水平，被整合到数学课程中的技术工具的创新性应用将越来越来多。
2. 促使学习者尽早地理解数学，从而积极地发现更多的数学是一个重要的任务。

1. 引言

我们经常可以听到如此的评论，“你的数学测试不够好，因此你并不出色。”或者“你在做数学方面不够出色。”这些评论经常导致学生极其迅速的丧失对数学的兴趣。它也反映在传统的评价学生学习的方式上，教师“主导”了极大多数的学习内容和环境，学生只是简单地“接受”或“顺从”他们所被传授的教学。

另一方面，技术工具迅速地发展，我们可以使学习者能够发展他们的学习水平，拓展他们获取必要信息的方法。无论何时何处，学习者都能够研究合适的知识，他们不仅学习预期的传统课程知识，而且也可以在运用技术工具探索课题的同时获得其他有用的知识。因此现在理应考虑发展交叉的课程知识，其中包括我们一致认定需要覆盖的固定的静态知识课题，而且也包括当技术工具加入进来获得了新发现时所形成的

动态知识。

这不是我们可以往数学课程挤进多少知识，而是学生可以吸收并运用多少知识的问题。在各个国家，对于未来的数学教师，都没有专门的公式，用来表示需要多少那样的知识；我们可以肯定的说，一位教师具有那样的知识越多，对我们整个教育系统就会更好。2D-3D 可视化工具已经成为帮助学生理解抽象复杂的知识的主要的驱动性力量。基本的代数运算技能是学生在数学上取得成功所必需的；与此同时，可以明显的看到，只有当学生通过探索理解如何导出一个定理或公式，而不是通过若干小时的反复操练式的训练时，他们才能发现更多的数学。教师、家长和社会应该鼓励学生创新地（及时适当的）运用技术工具探索发现更多的数学。

在下面的第 2 小节，我们将描述各个国家未来教师的学科知识情况。第 3 小节，我们将论及创造力的重要性，并给出一些有助于理解我们观点的案例。

2. 学科知识

以下为美国教育系统的一些问题：

1．文章“教育危机（Educational Crisis）”（见〔1〕），正确指出了美国数学教师教育的许多基本问题。

2．文章“美国中学数学教师在国际同行中显得准备不足” （见〔2〕），密歇根州立大学著名教授 William Schmidt 指出“我们未来的教师没有获得足够的数学教育，还没有准备好教授中学所需要的、能适应未来国际竞争的数学课程，”。

3.1999 年的一份研究表明有 49%的七年级数学教师没有达到数学辅修的水平（见〔3〕）。

4．事实上许多大学毕业的学生必须补习数学课程。（见〔4〕）

5．在美国我们无法要求未来的中学教师完成微积分课程的系列内容，其根本原因在于他们不需要教授微积分又何必需要完成微积分课程的学习呢？。

6．从排名前三位的大学中选择执业资格教师所设定的标准过高——See 10 steps to World-Class Schools（见〔7〕）。

环视以上所论及的各个问题，美国的许多教育工作者感到困惑，我们该如何期望没有足够的基础知识的未来的数学教师会在教学中表现良好。那么未来的初中（或高中）学校的教师需要学习多少数学？讨论这个问题的答案已经超越了本文的研究范围，然而我们可以看看韩国的情况。Seoul国立大学为未来的中学数学教师所设置的

高水平的数学课程（Kwon Oh Nam提供）包括抽象代数、实分析、拓扑等等。对此美国的数学教育工作者可能立即会想到美国不可能有同样的设置。我们进一步注意到美国和其他国家（以韩国为例）的中学生的一个主要的差别是，一个韩国中学生没有把数学课程作为选修课的权利，数学是他或她为了学业成功所必需掌握的，不管他或她未来的目标是什么。简而言之，在韩国没有学习数学就意味着没有接受大学教育的机会（参见[5]）。讨论美国和韩国的教育体系如此不同的原因，已经超出了本文的研究范围。但有个关键的原因不得不提，就是在美国许多学生选择职业时不愿意当教师，因为在教学领域的薪资水平与其他职业相比没有什么竞争力。

我们看到在很多亚太地区国家的数学课程中有许多高深的内容，这里有许多原因.许多国家对大学甚至高中都要求各类入学考试。来自家长、教师和社会的高期望使得学生要花大量的时间在做家庭作业上。随后，国际数学奥林匹克（IMO）补习班开始在中国盛行就不让人吃惊了。（一个简要的中国的IMO历史，见[6]）。）记住在亚洲的许多学生是“服从”和“接受”他们所教的一切。他们一般倾向于在课堂中很少提出问题，这样教师一堂课就能教更多的内容。因此，学生没有选择的余地，只能接受和完成他们在毕业前所要求的所有学科。许多学生仅仅为了通过考试而记住了公式，而没有理解一个公式是怎么推导来的。

对这种情况的一个直接的批评就是当涉及到解决现实生活中的应用问题时，那些学生缺乏创造力和应变能力。而且，对考试的过分强调会让许多日后可能会对数学感兴趣的学生也丧失对数学的兴趣。应该给学生机会，把他们在课堂中所学的数学知识和真实生活中的应用接合在一起。创新思维能力对一些数学课程变得至关重要。

3. 创造力不是来自于反复操练，而是来自于探索。

很明显数学学科知识和创造力对数学课程都很重要。数学基础知识和基本技能是两个基础在[16]中会被提及。我们需要经常检验和更新那些对学习者是必须的知识。当然，我们看到在许多亚太地区的数学课程改革趋向于使用更多的现代技术。

- 2000年，台湾教育部：数学应该让80%的学生感觉容易。可以使用计算器和/或计算机来代替复杂的代数运算。
- 2001年，中国公布国家课程标准实验稿：“填鸭式”被“解决现实生活中的数学问题”取而代之。下面这些类型的问题从允许使用科学计算器的上海地

区的高考中消失了：比较$6^{0.7}$，7^6和$\log_{0.7}{}^{6}$的大小；求$\log(20)+\log_{100}^{25}$ 。他们已经提议用多种标准来评价学生的成就，而不是仅仅依据单一的考试。

- 2009年9月，新加坡教育部规定：A水平考试者能使用被认可的图形计算器（没有CAS）。这只是在A水平的数学考试中使用，而不是其他学科（例如物理）。图形计算器在O水平考试中不允许使用。（谢谢Ang Keng Cheng提供信息）
- 澳大利亚在关于计算器在高中的使用上，每个州有他们各自的规定。有几个州，例如西澳大利亚州，维多利亚州，塔斯马尼亚州和昆士兰州都规定可以使用或者正打算在学校教学中和客观性考试中使用CAS系统，这些考试对进入大学至关重要。各地进入的时间表有所不同，这些州的课程大纲和评价也有所不同。在澳大利亚没有全国统一的考试和课程标准。（谢谢Barry Kissane提供的信息）。
- 在印度，7000名高中学生使用MATHLAB系统进行数学实验。
- 马来西亚教育部在许多年前就积极地提供图形计算器给学校的教师。技术工具已经与数学课程溶为一体。已经实现了“每一个数学和科学教师都有一台掌上电脑”的目标。
- 2004年的法国：教育部增设技术能力的考查作为未来数学教师的口试的一部分（在数学研究生教育中）。

从上述内容我们可以看出技术工具已经在许多国家的主要考试中扮演了一个重要的角色。因此，教师必需重新设计他们的教学内容，希望更多的课堂探索（使用技术工具）将使更多的学生对数学感兴趣。在以下的两部分，我们将描述一些课堂中的探索活动，这些活动将有助于学生理解一些困难的概念，甚至让学生发现数学。

3.1死记硬背住的公式将仅仅持续一个测验的时间

我猜想如果我们在代数运算之前介绍更多的几何学和图形表征，许多学生不会这么早就丧失对数学的兴趣。我们希望不断进步的技术工具能帮助未来的教师在他们开始真正从事教学工作之前学习足够多的数学知识。我们应该意识到由于新的高级技术工具的使用，各个学习者发现新的领域成为可能。

老子说：“授人以鱼，不如授之以渔，授人以鱼只救一时之及，授人以渔则可解一生之需。”我则说：记住一个公式可能让你通过一个考试；理解一个公式则能让你在一生中发现更多的数学。

我想起当我高中时，我被告知一个点$P(x_1,y_1,z_1)$到平面ax + by + cz + d = 0的距离公式是

$$\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

我和其他同班同学一样，几乎不关注这个公式是怎么推导出来的，因为在50分钟的测验中几乎没有时间去考虑这个公式的来历。

在向量计算中有两个重要概念，一个是点积（数量积）$\vec{a}\cdot\vec{b}$；另一个是叉积（向量积）$\vec{a}\times\vec{b}$，这里$\vec{a},\vec{b}$是R^n中的两个向量。然而，许多学生只记住$\vec{a}\cdot\vec{b}$定义成$\sum a_i b_i$或者$|a|\cdot|b|\cdot\cos\theta$，或者错误的理解为，当$\vec{a},\vec{b}$是$R^2$中的两个向量时，$\vec{a}\cdot\vec{b}$是向量$\vec{a},\vec{b}$确定的平行四边形的面积。一些学生不同意$\vec{a}\cdot\vec{b}$表示由向量$\vec{a},\vec{b}$确定的平行四边形的面积，不是因为他们完全理解了$\vec{a},\vec{b}$和$\vec{a}\times\vec{b}$各自的几何解释，而是因为他们记住了由向量$\vec{a},\vec{b}$确定的平行四边形的面积公式应该是$\|\vec{a}\times\vec{b}\|$而不是$\vec{a}\cdot\vec{b}$，因而我们将更详细的探索$\vec{a}\times\vec{b}$和$\vec{a}\cdot\vec{b}$。对于在2D中的两个向量$\vec{a}$和$\vec{b}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}$表示被向量$\vec{a}$和$\vec{b}_\perp$所确定的平行四边形面积，这里$\vec{b}_\perp$是和向量$\vec{b}$垂直的向量，数量上和$\vec{b}$相等，我们通过观察图形1（a）和1（b）来总结这个内容，有兴趣的读者可以进一步使用网上由日本的IES开发的JAVA程序进行探索（见[8]）.

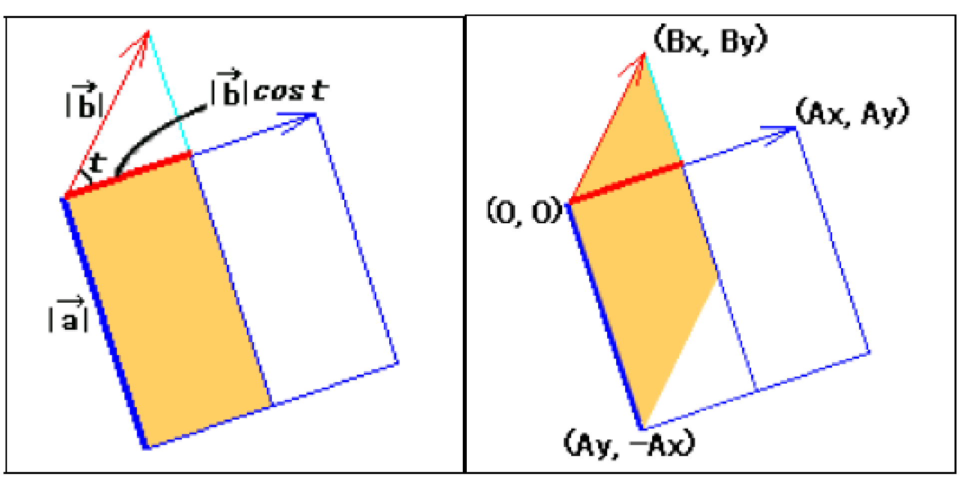


图1(a),1（b）点乘

对于在2D中的两个向量$\vec{a}$和$\vec{b}$，根据叉积的定义有$\vec{a}\times\vec{b}=(\|a\|\cdot\|b\|\sin\theta)\vec{n}$，此处$\vec{n}$

是一个和$\vec{a}$和$\vec{b}$都垂直的单位向量，它的方向由右手法则给出，$\|a\times b\|$等于由向量$\vec{a}$和$\vec{b}$确定的平行四边形面积，[9]中的JAVA程序允许我们从几何的角度来形象化这个结论。

结合我们对于$\vec{a}\cdot\vec{b}$和$\vec{a}\times\vec{b}$探索的思路，不难理解为什么在3D中由三个向量$\vec{a}$，$\vec{b}$和$\vec{c}$确定的平行六面体的体积可以写成：

$$\left|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\right| = \|a\|\cdot\left\|\vec{b}\times\vec{c}\right\|\cdot|\cos\theta|,$$

这里θ为由向量$\vec{b}$和$\vec{c}$所确定的平面的法向量$\vec{n}$和向量$\vec{a}$之间的夹角。可以进一步通过一个JAVA程序来探索相关内容（见[10]）。此外，$\|a\|(|\cos\theta|)$的结果表示了平行六面体的高，它也能被用来求点到平面的距离。此外，我们发现由三个向量$\vec{a},\vec{b}$和$\vec{c}$确定的平行六面体的体积实际上等于由向量$\vec{a}$和$(\vec{b}\times\vec{c})_{\perp}$确定的平行四边形面积，$(\vec{b}\times\vec{c})_{\perp}$是垂直于向量$\vec{b}\times\vec{c}$并且大小与其相同的向量，我们注意到$(\vec{b}\times\vec{c})_{\perp}$为一个由向量$\vec{b}$和$\vec{c}$所确定的平面上的任意一个向量。我们“发现了”一个附带的观察结果，这个在正规的教科书中一般不会提及。不难看出，由于高级技术工具的使用，更多的有趣的数学结论能被探索和发现。

下面我们来说明传统定理的证明有时能用几何作图的方法来进行，这样可以使证明更有趣和直观。

例1 关于中值定理或柯西中值定理的证明。这是两个在应用数学中很有价值的定理。然而，当提到其中任何一个定理的证明时，很多人都不能回忆起证明方法，这并不让人惊奇。

例如，如下的中值定理：

设函数$f:[a,b]\to R$在区间[a,b]中连续，在(a,b)中可微。那么在区间（a,b）中必定存在点x_0，使

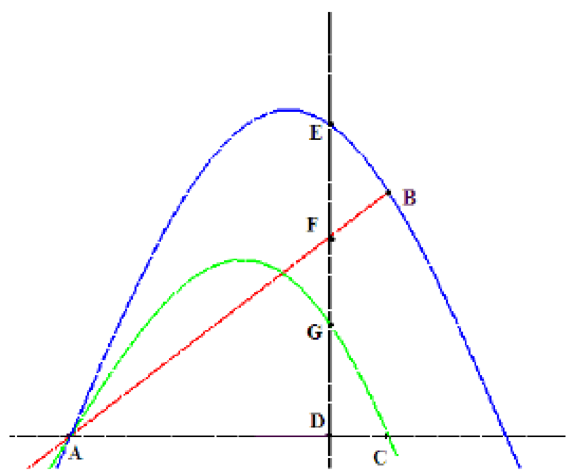
$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

为了证明这个定理，在许多传统的教科书中，按下面的表达式引入引入辅助函数h，

$$h(x) = f(x) - (\frac{f(b) - f(a)}{b - a})(x - a)\text{。}$$

于是我们可以验证h满足罗尔中值定理的条件，从而推论出在区间(a,b)中有一个点c,使得$h'(c) = 0$，因而中值定理成立。其实，我们能引导学生从几何的角度去观察函数h是怎样构造出来的。假设这条兰色曲线（较深的一条）为函数$f(x) = \cos(x)$的图像，在如下图所示的区间$(a,b) = (-\frac{\pi}{2}, 0.725)$上满足中值定理的条件。连接位于函数$y = f(x)$上的点$A(\frac{\pi}{2}, 0)$, $B(0.725, f(0.725)$的线段AB，回答下面的问题：

如果我们旋转线段AB（这里线段AB的端点在函数的图像上），使AB成为一条水平方向的线段，则原函数的图像出现怎样的变化？文章[11]提供了利用动态几何和CAS 的方法来探索 h(x)几何意义的过程，绿色的曲线或亮色曲线正好是我们想求的函数 h(x)（通过观察**距离 EF=距离 GD**），我们对 h(x) 运用罗尔定理即可得证.



图∈ 两个函数和弦的图像。

我们能用一个类似的方式来证明柯西中值定理（CMV）。CMV的证明如下：

假设函数$f:[a,b] \to R$和$g:[a,b] \to R$是连续的，它们在区间(a,b)中是可导的。而且，假设对于(a,b)中所有的t， $g'(t) \neq 0$。于是在(a,b)中有一个点t，满足

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}\text{。}$$

我们很少看到为什么会有 f 和 g 两个函数以及这个结论是怎样获得的的几何解释。在文章[11]，总结了怎样通过以上在证明拉格朗日中值定理中描述的拓展思想，利用几何方法来证明CMV的过程。

1．假设函数f和g满足柯西中值定理的条件，这个定理能被解释成由如下的参数方程确定的参数方程曲线，其中t为参数：

$$P(t)=[g(t),f(t)]$$

存在$a \le t \le b$，其斜率与从点$(g(a),f(a))$到点$(g(b),f(b))$的弦的斜率相同。

2．等价地，如果我们应用中值定理于极坐标方程$r=h(t)$的图像，可以将极坐标写成参数方程形式

$$[x(t),y(t)]=[h(t)\cos(t),h(t)\sin(t)]=[g(t),f(t)],$$

那样我们可以获得柯西中值定理的结论（详见[11]）。

通过这个例子，我们看到图形和几何动画可以使更多的读者感到数学更容易接近和有趣。计算机代数系统（CAS）也为一些学习者分析证明和进行数学挑战提供了帮助。

3.2 技术工具发展所带来的内容进展

我们进一步使用下面两个例子来证明传统内容可以整合进更多的现实生活的应用问题。更重要的是当技术工具不断发展时，学习者能发现更多的数学。这一点与全美科学基金会推进科学，技术，工程和数学项目（STEM）的意见相一致（见[12]）。我们需要把数学和其他应用学科整合在一起。我们通过下面的例子说明这一点。学生学习求函数f(x)的反函数的方法，在预科微积分是求一个函数$g(x)$，它关于直线$y=x$和$y=f(x)$对称。

例2 我们把求一条参数曲线关于直线$y=mx+b$的逆象的方法到求一个在曲线C_1上的光源 B关于在曲线C_2上的一个动点P的反射光，我们称为B'。这个点B'的轨迹称为正交曲线（orthotomic curve），它和焦散曲线（caustic curve）的概念有关。这个概念也能被拓展为3D中的相应概念。关于这个问题的完整描述可见[13]。

这个问题能用物理学中的光学知识轻松地探索。如图3（a），此处

$C_1=[x_1(t),y_1(t)]=[2\cos t-\cos 2t,2\sin t-\sin 2t],t\in[0,2\pi]$（心脏线），以及

$C_2=[s,f(s)]=[s,-2+\sin(s)]$（下图中的正弦曲线）。我们选择在曲线$C_1$上的光源B，令$C_3=[p(t),q(t)]$是$C_1$的关于$C_2$在点P的切线的反射映象。对于一个在$C_1$上固定的点B($C_1$上的光点源)，在曲线$C_1$上的B点关于曲线$C_2$上的动点P的反射，这个我们记为$B'$，这个点$B'$的轨迹被称为正交曲线。于是我们得到下面的观察结果：

1．图3（b）所示的C_2的相对于B的正交曲线，可以使用一个动态几何软件例如Geometry Expression（见【19】）进行实验，并使用一个CAS例如maple加以验证。

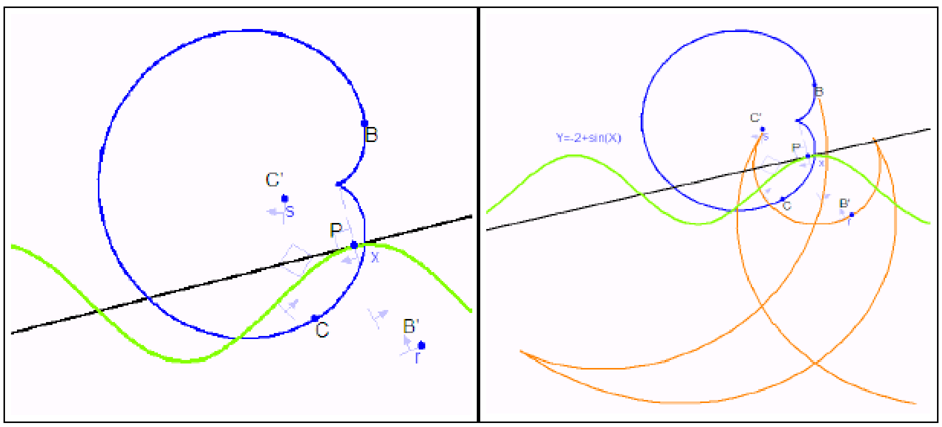


图3（a）原始曲线以及图3（b）原始曲线和切距曲线

2.选择C_1上的另一个光源C,我们得到另一条关于C的曲线C_2的正交曲线（图3中黑或暗色的曲线）。利用Geometry Expression的“拖动”的方式，我们立即发现下面的观察结果（见图3（c））：当点B靠近点C时，橘黄色的正交曲线（或者比较亮的曲线）靠近黑色的正交曲线（较黑的一条）

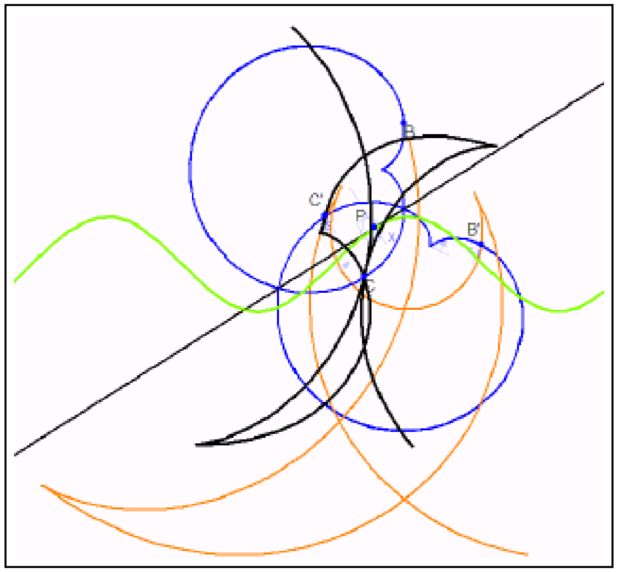


图3（c）两条orthotomic 曲线

3．黑色正交曲线的尖点出现在C_2的拐点上。□

在过去，上面的所有观察结果在没有适当的技术工具的情况下很难认识清楚。

在光学中，我们经常听到这个术语“焦散曲线”。它能看作由一个曲线的反射线所形成的包络。我们首先记一条曲线C的渐屈线是它的所有曲率中心的集合；它相当于C的所有法线的包络。可以知道来自一个光源O的曲线C的反射线产生的焦散线（曲线C关于点O的焦散线）等价于求关于O的曲线C的正交的渐屈线。或者等价于，焦散曲线是关于点O的所给曲线的正交的法线族的曲率的中心。我们可以使用一个JAVA程序（见[15]）来探索正交曲线和焦散曲线之间的关系，用其他方式可能很难说明这个关系。

第一步：产生原始曲线使得它大致像一个椭圆（见图 4）：

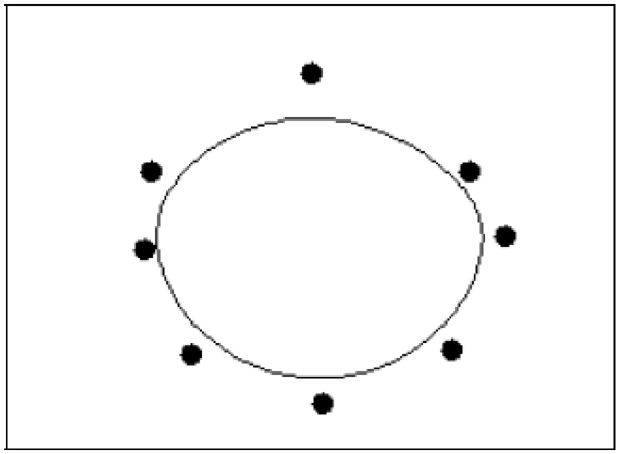


图 4，产生一条曲线

第二步：接下来，选择这条曲线然后点击“Orthotomic Curve”，图像应该是图5这样，注意红色的中心点为光源点。

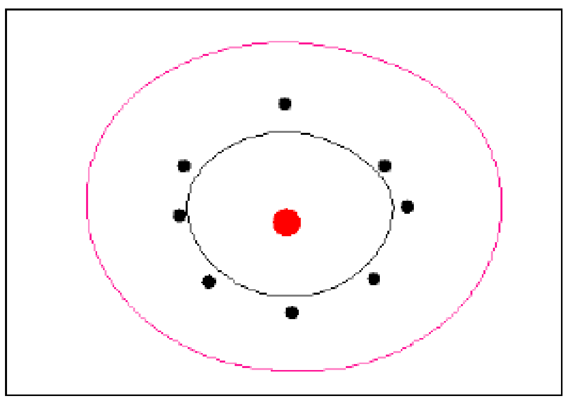


图5 原始曲线和它的正交曲线

第3步：现在选择正交的法线族，这个图形应该看上去如图6：

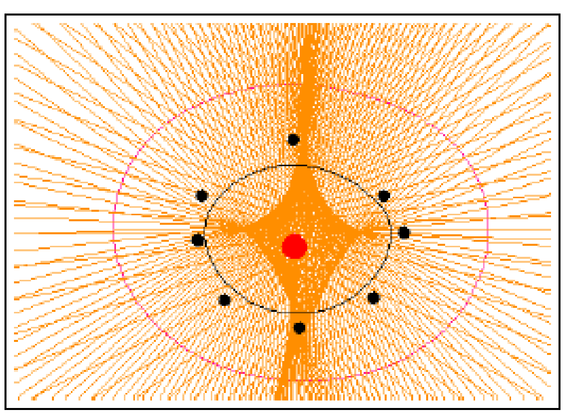


图6 原始曲线，它的正交曲线和正交的渐屈线

第4步：点击焦散曲线，注意下面的图形，我们发现焦散曲线是一个关于0点（红色或中心点）的所给曲线的正交法线族的曲率的中心的集合。

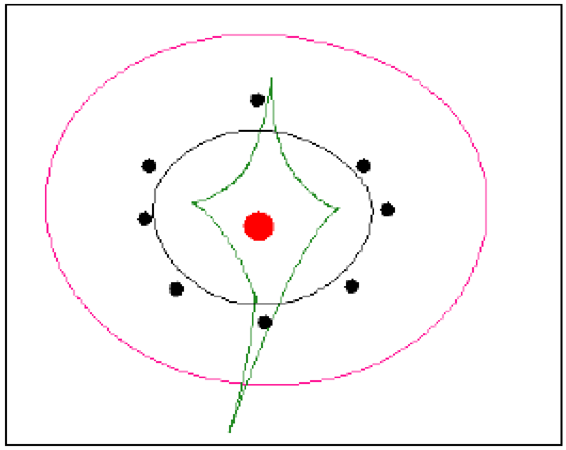


图7，原始曲线，它的正交曲线和焦散曲线

这些几何上得到的观察结果和代数方法相一致，能使用如MAPLE这样的计算机代数系统来验证。例如，我们考虑椭圆$[\frac{7}{5}\cos s, \frac{6}{5}\sin s]$，此时$s \in [0,2\pi]$，椭圆关于原点O的正交曲线，能被表示为（见[13]）如下：

$$\left[\begin{array}{c} -\sin(2\arctan(\frac{6\cos s}{7\sin s}))(-\frac{6}{5}\sin s - \frac{6(\cos(s)^2)}{5\sin s}) \\ -\cos(2\arctan(\frac{6\cos s}{7\sin s}))(\frac{-6}{5}\sin s - \frac{6}{5}\frac{(\cos s)^2}{\sin s}) + \frac{6}{5}\sin s + \frac{6(\cos s)^2}{5\sin s} \end{array}\right]$$

我们绘制原始的椭圆（绿色或内部的那个椭圆），它的正交曲线（兰色或外部的那个椭圆），以及它的焦散曲线，显示为红色的曲线（在内部椭圆的中心），都在图8中显示。

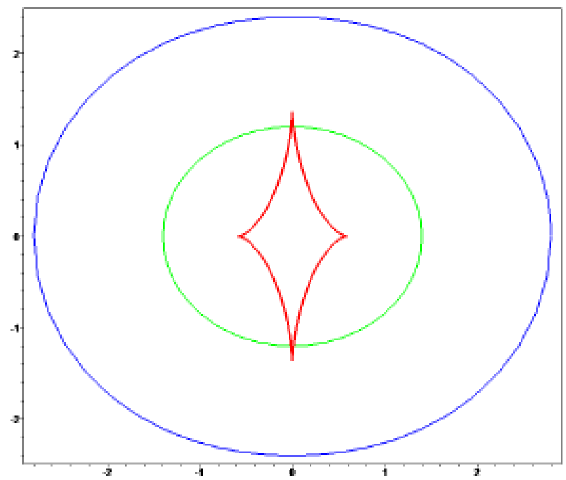


图8 一个椭圆，正交曲线和焦散曲线

我们注意到图7实际上和图8是相似的，而且图7可以从几何角度的探索来获得，图8可以在在一些完整的理论和代数证明之后获得。明显，几何方法为学习者提供了关键的直观认识和对学习者的促进作用，代数方法为想要做的更多的学生提供了挑战的机会。这个例子也揭示了，当学习者既拥有足够多的学科知识，也拥有操作最新技术工具的技能时，他们可以从数学的角度探索其他应用学科中的许多复杂概念。

接下来，我们探索求在空间的曲面和平面上的不相交的曲线上的平方距离和的全局极小值一个例子。这个几何解释将有助于学生理解拉格朗日乘数法和线性代数中学到的概念。

例3 给定四个空间中的凸面，各自表面分别为橘黄色，黄色，蓝色和紫色（如图9），分别记为S_1,S_2,S_3以及S_4。求S_1（橘黄色的或者在左边较底角落的那一个），S2（黄色的或者在右边较低角落的那一个，S3（蓝色的或在上面右边的那一个）以及S4（紫色或这个在左边上面的那个）上的点A，B，C和D，使得AB +AC +AD的距离和为最小值。

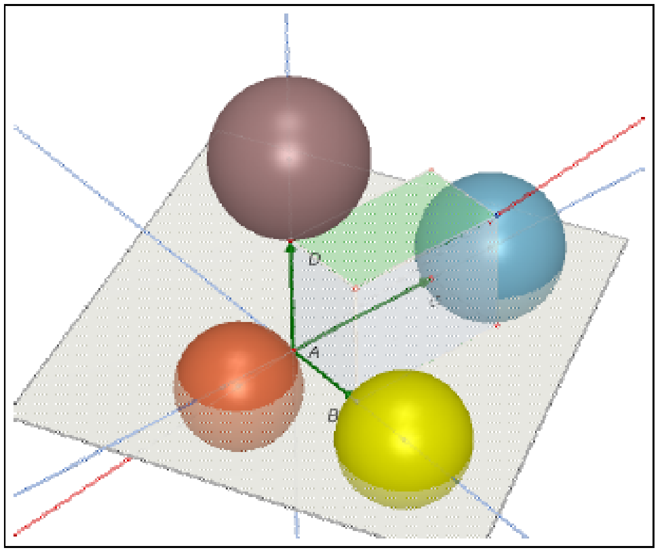


图9 四个凸面的最短的平方距离和（感谢J.J. Dahan)

这个例子的详细内容能在文章[14]中找到。我们可以从下面的预备问题来开始这个问题：

如果有两个不相交的曲线或曲面在各自的空间中，这两条曲线和曲面间的最短距离是什么？利用一个动态几何软件进行探索，不难发现这个最短距离出现在连接各自曲线或平面的点的线段正好垂直于该点的切线或切平面。我们通过下面的图10（a）和10(b)来演示。

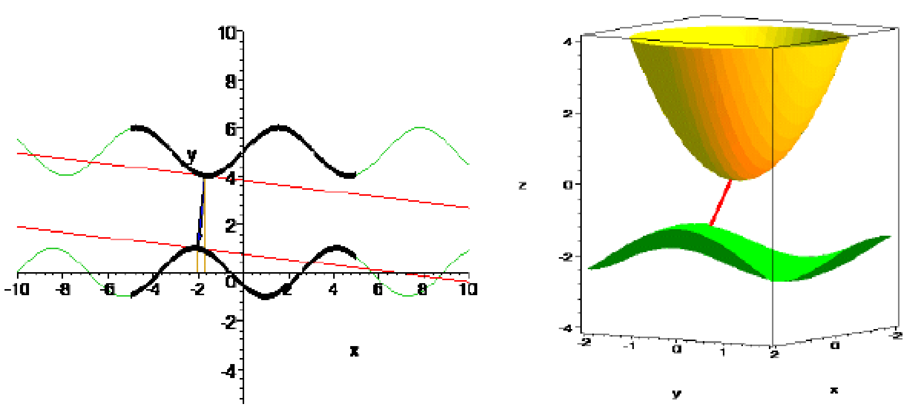


图10（a）和(b)在两条曲线和两个曲面之间的最短距离

我们类推这个思想去求一条曲线（如下图中的正弦曲线）到两条其他的曲线——一条是抛物线，另一条是圆——的最小平方距离和，可以观察下面的图形11。这个图是否告诉了我们应该怎样确定正弦曲线上的法向量的位置以及另外的两个向量？这个后面会很清楚。

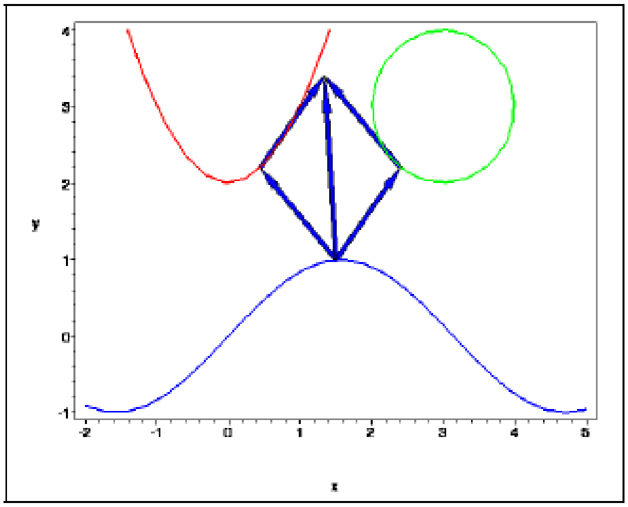


图11. 从一条曲线到另外的两条曲线的最小的平方距离和

我们注意在如图9中求最短的平方距离和$AB+AC+AD$所得到的重要观察结果，从几何的角度能被概述如下：

1.向量AB应该是平行于曲面S_2上的B点的法向量.这个等价于□

$$AB=\lambda_2(\nabla S_2 atB) \text{ 对某些 } \lambda_2.$$

2.向量AC应该平行于曲面S_3上C点的法向量▹这个等价于

$$AC=\lambda_3(\nabla S_3 atC) \text{ 对某些 } \lambda_3.$$

3.向量AD应该平行于曲面S_4上D点的法向量▹这个等价于

$$AD=\lambda_4(\nabla S_2 atD) \text{ 对某些 } \lambda_4.$$

为了得到$AB+AC+AD$的最小值,我们应该设置点A,使得S_1在A点的法向量和$AB+AC+AD$的方向相同▹这就等于说我们能求得λ_1‹使得

$$\lambda_1(\nabla S_1 atA)=\lambda_2(\nabla S_2 atB)+\lambda_3(\nabla S_3 atC)+\lambda_4(\nabla S_2 atD).$$

下面的定理总结了我们以上所讨论的,证明可以在参考文献[14]中找到.

定理4 如果这个平方距离函数的和为

$f(X_1,X_2,,,,X_p)=|X_1-X_2|^2+|X_1-X_3|^2+...|X_1-X_p|^2$有一个总值。这里

$X_i=(x_1^i,x_2^i,...,x_n^i), i=1,2...,p,p$ 同时满足

$g_1(X_1)=c_1, g_2(X_2)=c_2,...,$和$g_p(X_P)=c_p$，

在它的闭区间中有 $X_0=(x_1^*,x_2^*,...,x_p^*)$，我们能求系数， $\lambda_j, j=1,2,...p$

使得 $\lambda_1\nabla g_1(x_0)=\sum_{j=2}^{p}\lambda_j\nabla g_j(x_0)$。

这个例子更进一步显示了如果学生能把合适的最新的技术工具和恰当的知识内容相结合的话，有大量有趣的问题在等着我们去探索；同时也说明了学生能够把他们在微积分和线性代数中所学的概念结合在一起也是很重要的。因此，当我们考虑数学课程改革时，需要考虑正确的内容之间的超链接方式。这个例子进一步证明了当学生解决一个问题时，一个问题的几何解释将为学生掌握关键的概念提供至关重要的直观认识和促进作用。直观认识将更多的帮助学生建立猜想和怎样在适当的时机操作一个CAS来验证他们的猜想的策略。□

4.结论

随着日益发展的技术工具的出现，解析几何学中的问题、甚至微分几何中的问题，我们都可以用实验的方法来研究 (见【17】，和【18】)，而要用别的方式来进行（实验）是很困难的一件事。就像我们从上面的讨论中所知道的，各个国家的数学课程是不同的，我们只能吸取全世界的意见来解决我们自己的问题。决策者需要采纳各方面的意见，了解什么技术工具是适合学生用的，然后在各自的国家中做出最好的决定。

许多人会同意在美国未来的中学数学教师 (至少) 有必要完成微积分课程，然而，（暂时）很难实行这个计划。不过，技术工具可能帮助我们从图形和几何的角度直观地引入微积分概念，而不是从很抽象的代数的角度。尽管许多亚太地区的国家明确赞同数学课程需要一定量有深度的内容知识，我们也需要提醒注意如下的问题：

1. 学生仅需要记住定理的证明吗？
2. 学生是否允许求解探索性项目的问题？它不在于教师在一个学期能教多少内容，而是看学生能应用多少数学内容。
3. 我们感兴趣的是学生能把数学技能应用于他们的整个生活中，而不是仅仅通过一个考试。
4. 为了考试的教学只会让更多的学生不喜欢数学。
5. 数学应该按照跨学科的方式来教学。数学应该是一个可以在真实世界中应用的学科。

提供足够的数学内容和激发学生的创造性思维能力是数学课程的关键。信息技术确实不能解决我们的所有问题，但是将会辅助我们在数学知识和创造力之间达到一个平衡。把技术工具应用到教学当中不是区区小事，而是未来很长时间内与时俱进（伴随的）的一个教学课题。许多学生在进大学之前，因为在代数运算技能的缺乏，已经对数学失去了自信或兴趣。因此，我的观点是，开发一个课程让教师知道何时、怎样更多利用直觉和激情介绍数学，使更多的学生在年幼时就能意识到数学的趣味性和易理解性是非常紧迫（必要）的。

参考文献□

[1] One article summarizes ‘Educational Crisis’ in the US,
http://www.bu¤alonews.com/367/story/786743.html.

[2] U.S. Middle School Math Teachers Are Ill-prepared Among International Counterparts,
http://www.nsf.gov/news/news_summ.jsp?cntn_id=110845.

[3] A report in 1999,
http://www.math.vcu.edu/Preparation_of_middle_school_teachers/need.htm.

[4] MAXWELL, B. ‘Math project yields formula for success’,
http://www.scrippsnews.com/node/43517.

[5] Woo Hyung Whang, ‘Speculating on the High Achievement of Korean Students’
http://www.nctm.org/resources/content.aspx?id=1592.

[6] 吴康.数学竞赛与初等数学研究在中国, http://www.slideshare.net/jiakon/ss-1326725.

[7] Brock W, Marshall R, Tucker M. 10 steps to World-Class Schools,
http://www.washingtonpost.com/wp-dyn/content/article/2009/05/29/AR2009052903012.html.

[8] A Java applet on dot product, International Education Software of Japan,
http://www.ies.co.jp/math/java/.

[9] A Java applet on cross product,
http://www.math.umn.edu/~nykamp/m2374/readings/crossprod/.

[10] A Java applet on parallelepiped,

http://www-math.mit.edu/18.013A/HTML/chapter04/section01.html.
[11] Yang, W.-C, ‘Revisit Mean Value, Cauchy Mean Value and Lagrange Remainder Theorems’, The Electronic Journal of Mathematics and Technology, Volume 1, Issue 2, ISSN 1933-2823.
[12] National Science Foundation in the USA and STEM Program, http://www.nsf.gov/funding/pgm_summ.jsp?pims_id=5488.
[13] Yang, W.-C. and Lo, M.-L., ‘General Inverses in 2-D, 3-D, applications inspired by Technology’, The Electronic Journal of Mathematics and Technology, Volume 2, Number 3, ISSN 1933-2823, Issue 3, Volume 2, 2008, Mathematics and Technology, LLC, USA.
[14] Yang, W.-C, ‘Some Geometric Interpretations of The Total Distances Among Curves and Surfaces.’ The Electronic Journal of Mathematics and Technology, Volume 3, Number 1, ISSN 1933-2823.
[15] Yoshizawa, S., ‘Curve Simulator’, hosted by the Electronic Journal of Mathematics and Technology (eJMT), https://php.radford.edu/~ejmt/Resources/CurveSimulator/CurveSimulator.html.
[16] Zhang, D., Li, S. & Tang, R. .The Two Basics: Mathematics Teaching and Learning in Mainland China., How Chinese Learn Mthematics, Eds, Fan, L, Wong Ngai-Ying, Cai, J. and Li, S., by World Scientific, 2004, ISBN 981-256-014-9.
[17] Kawski, M. ‘Curvature for everyone’, the Proceedings of the 8th ATCM (http://math.la.asu.edu/~kawski/preprints/03-12-atcm-taiwan.pdf).
[18] Eigen, David. ‘Java Demonstration Software for Differential Geometry and Polyhedral Theories’, http://www.cs.brown.edu/research/pubs/theses/ugrad/2003/deigen.pdf.
[19] Geometry Expressions 1.0.55, a product of Saltire Software, 2006, http://www.geometryexpressions.com/.
[20] Maple, a product of Maplesoft, http://www.maplesoft.com/.